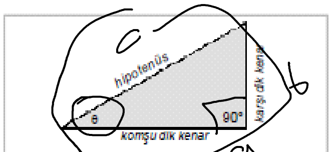
Bölüm 2: Trigonometrik fonksiyonlar ve vektörel işlemler

$c^2 = a^2 + b^2$

1. Giriş

Alternatif akımla çalışan alıcıların (direnç, bobin, kondansatör) söz konusu olduğu devrelerin çözümünde (analizinde) vektörler ve trigonometrik fonksiyonlar kullanılmaktadır. Vektör, trigonometri ve geometri (genel olarak matematik) bilgisi yetersiz olan bir kişinin AA ile beslenen devrelerin analizini yapması mümkün değildir.

Bu bölümde özet niteliğinde geometri, trigonometri ve vektörler hakkında bilgiler verilecektir. Geniş bilgi için matematik kitaplarına bakılmalıdır.



Şekil 1: Dik üçgen

2. Tanımlar

a. Dik üçgen

Şekil 1'de görülen dik üçgende θ açısının karşısında bulunan doğru **karşı dik kenar** olarak adlandırılır. θ açısına komşu olan doğruya ise komşu **dik kenar** adı verilir. Dik üçgendeki en uzun kenar ise **hipotenüs** olarak tanımlanır.

Bir dik üçgendeki kenarların birbirlerine oranlarını tanımlayan fonksiyonlara trigonometrik fonksiyonlar denir. Bu fonksiyonlar kullanılarak bir çok matematiksel, elektriksel, fiziksel hesaplamalar yapılabilmektedir.

Dik üçgende dik olmayan açılardan birisi θ olarak adlandırılırsa,

► Karşı dik kenarın hipotenüse oranı θ açısının sinüsü olarak tanımlanır.

$$\boxed{\text{Sin } \theta = \frac{\text{karşı dik kenar}}{\text{hipotenüs}}}$$

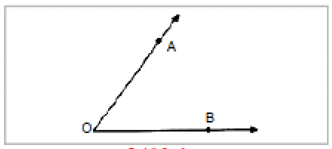
► Komşu dik kenarın hipotenüse oranı θ açısının kosinüsü olarak tanımlanır.

$$\boxed{\text{Cos } \theta = \frac{\text{komşu dik kenar}}{\text{hipotenüs}}}$$

► Karşı dik kenarın komşu dik kenara oranı θ açısının tanjantı olarak tanımlanır.

$$\boxed{\text{Tan } \theta = \frac{\text{karşı dik kenar}}{\text{komşu dik kenar}}}$$

Açıların sinüs, kosinüs ve tanjant değerleri trigonometri cetveli adlı çizelgede yer alır. Çizelge olmadığı zaman trigonometrik fonksiyonları hesaplama özelliğine sahip bir hesap makinesi de kullanılabilir.



Şekil 2: Açı

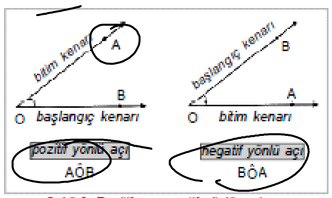
$$\cos\varphi = \frac{a}{c}$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{c}$$

$$\tan\varphi = \frac{b}{a}$$

b. Açı

Başlangıç noktaları aynı olan iki ışının birleşimine **açı** denir. OA ve OB ışınları açının kenarları, O noktası açının köşesidir.



Şekil 3: Pozitif ve negatif yönlü açılar

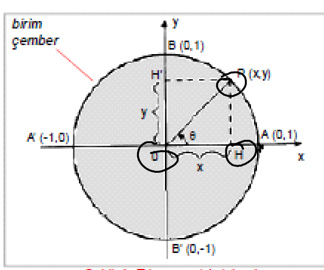
Bir açının kenarlarından biri başlangıç kenarı, diğeri bitiş kenarı olarak kabul edilirse elde edilen açıya **yönlü** açı denir.

Saat ibresinin dönüş yönünde olan açılar **negatif yönlü**, ters yönünde olan açılar ise **pozitif yönlü** açı olarak tanımlanır.

3. Trigonometri dairesi (çemberi)

Merkezi orjinde ve yarı çapı '1' birim olan çembere **birim (trigonometrik) çember** denir.

29



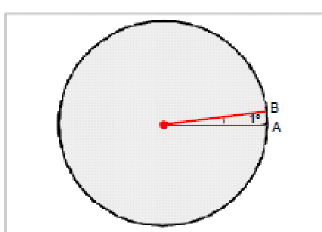
Şekil 4: Trigonometri dairesi

Pisagor teoremine göre,

OHP dik üçgeninden,

$|OH|^2 + |PH|^2 = |OP|^2$

$x^2 + y^2 = 1$



Şekil 6: Derecenin çember üzerinde gösterilişi

b. Grad

Bir tam çember yayının 400 eş parçasından birini gören merkez açının ölçüsüne 1 grad denir ve 1^G ile gösterilir.

Pisagor teoremine göre,
OHP dik üçgeninden,

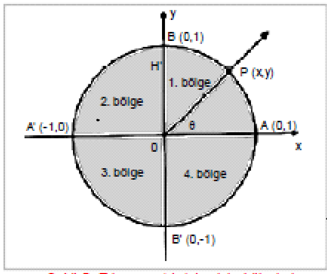
$|OH|^2 + |PH|^2 = |OP|^2$

$x^2 + y^2 = 1$

olur.

P (x, y) noktası,

1. bölge de ise x > 0, y > 0
2. bölge de ise x < 0, y > 0
3. bölge de ise x < 0, y < 0
4. bölge de ise x > 0, y < 0 olur.



Şekil 5: Trigonometri dairesinin bölgeleri

4. Temel (basit) bağıntılar

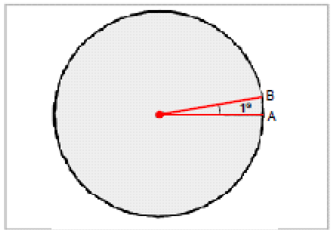
a. Derece

Bir tam çember yayının 360 eş parçasından birini gören merkez açının ölçüsüne 1 derece denir ve 1° ile gösterilir.

Derecenin 60'ta 1'ine (1/60) dakika, dakikanın 60'ta 1'ine (1/60) saniye denir.

1° = 60' ve 1' = 60'' dir.

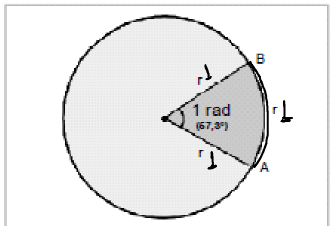
Bir tam çember yayının 400 eş parçasından birini gören merkez açının ölçüsüne 1 grad denir ve 1^G ile gösterilir.



Şekil 7: Grad'ın çember üzerinde gösterilişi

c. Radyan

Bir çemberin, yarıçap uzunluğundaki yayını gören merkez açının ölçüsüne **1 radyan** denir ve **1 rad** ile gösterilir. Çember yayının ölçüsü 2π radyan'dır. *1 radyan 57,3°'dir.*



Şekil 8: Radyan'ın çember üzerinde gösterilişi

1°

$2\pi = 360^\circ$

$\pi = 180^\circ$

Derece: **D**, Grad: **G**, Radyan: **R** olmak üzere,

$\frac{D}{360} = \frac{G}{400} = \frac{R}{2\pi}$ ya da $\boxed{\frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi}}$

yazılabilir.

Örnek 1: 140°'yi **grad** ve **radyan** cinsinden hesaplayınız.

Çözüm:

$\frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi}$ eşitliğinde D = 140° yazılırsa,

$\frac{140}{180} = \frac{G}{200} \Rightarrow G = \frac{200.140}{180} = \frac{28000}{180} = 155,55\ G$

$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{140.\pi}{180} = \frac{7\pi}{9}\ R$

Örnek 2: $\frac{\pi}{3}$ radyan'ı, **derece** ve **grad** cinsinden hesaplayınız.

Çözüm:

$\frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi}$ eşitliğinde $R = \frac{\pi}{3}$ yazılırsa,

$\frac{D}{180} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\pi} \Rightarrow \frac{D}{180} = \frac{1}{3} \Rightarrow D = \frac{180}{3} = 60^\circ$

$\frac{G}{200} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\pi} \Rightarrow \frac{G}{200} = \frac{1}{3} \Rightarrow G = \frac{200}{3} = 66,66$ grad

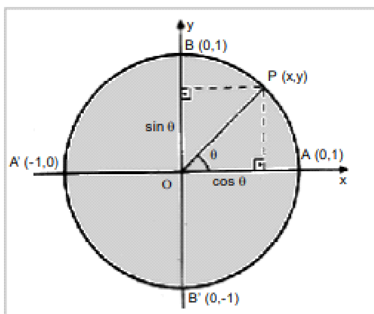
Örnek 3: 80 grad'ı **derece** ve **radyan** cinsinden yazınız.

Çözüm:

$\frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi}$ eşitliğinde G = 80 yazılırsa,

$\frac{D}{180} = \frac{80}{200} \Rightarrow D = \frac{180.80}{200} = 72^\circ$

$\frac{80}{200} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{80\pi}{200} = \frac{2\pi}{5}$ radyan



Şekil 9

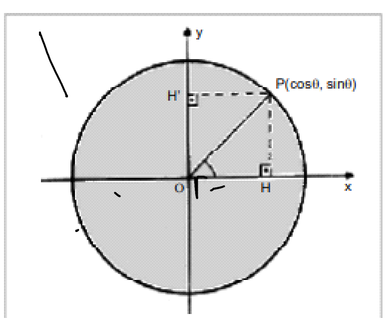
olsun. P noktasının apsisine, θ reel (gerçek) sayısının **kosinüsü** denir ve **cos θ** ile gösterilir.

P noktasının ordinatına da θ reel sayısının **sinüsü** denir ve **sin θ** ile gösterilir.

x eksenine ***kosinüs ekseni***, **y** eksenine ise ***sinüs ekseni*** denir.

A(1, 0) olduğundan,	cos 0° = 1
	sin 0° = 0
A'(-1, 0) olduğundan,	cos 180° = -1
	sin 180° = 0
B(0,1) olduğundan,	cos 90° = 0
	sin 90° = 1
B'(0, -1) olduğundan,	cos 270° = 0
	Sin 270° = -1'dir.

Şekil 10'daki POH dik üçgeninde,



Şekil 10

$\frac{140}{180} = \frac{G}{200}$

$G.180 = 140 \times 200$

$G = 155,55$

$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$ $R = \pi/3$

$\frac{D}{180} = \frac{\pi/3}{\pi}$

$\frac{D}{180} = \frac{1}{3}$

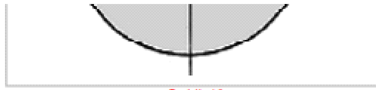
$D = \frac{180}{3} = 60^\circ$

$\frac{80}{200} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{80\pi}{200} = \frac{2\pi}{5}$ radyan

5. Kosinüs (cosinus) ve sinüs (sinus) fonksiyonları

Şekil 9'da verilen birim çember üzerinde P(x, y) noktasıyla eşlenen açı,

m(AÔP) = θ



Şekil 10

$\left.\begin{array}{l} OH = \cos\theta \\ PH = \sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow |OH|2 + |HP|2 = 1$'den

$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$ ise $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

elde edilir.

$\frac{D}{180} = \frac{80}{200}$

$D = \frac{180 \cdot 80}{200}$

$= 72°$

Burada, $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

ya da

$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$

ve

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

ya da

$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$

yazılabilir.

Birim çemberdeki dört bölgeye göre sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının işaretleri aşağıdaki gibidir.

1. bölge	2. bölge	3. bölge	4.bölge
$0<x<\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}<x<\pi$	$\pi<x<\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$
cos x>0	cos x<0	cos x<0	cos x>0
sin x>0	sin x>0	sin x<0	sin x<0

Sinüsün kosinüse oranı tanjantı verir.

$\boxed{\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

Kosinüsün sinüse oranı kotanjantı verir.

$\boxed{\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$

tan θ . cot θ = 1'den

$\boxed{\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}}$ ve $\boxed{\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}}$

elde edilir.

Kosinüsün tersine sekant (sec) denir.

$\boxed{\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}}$

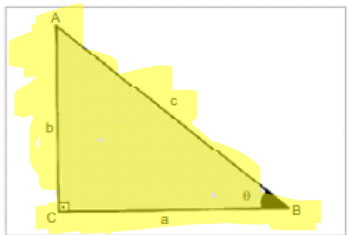
Sinüsünü tersine kosekant (cosec) denir.

$\boxed{\text{Cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta}}$

yazılabilir.

6. Dik üçgende dar açıların trigonometrik oranları

0° < θ < 90° koşulunu sağlayan θ açılarına **dar**



Şekil 11

açı denir.

$\boxed{\text{Sin}\,\theta = \frac{\text{karşı dik kenar}}{\text{hipotenüs}} = \frac{b}{c}}$

$\boxed{\text{Cos}\,\theta = \frac{\text{komşu dik kenar}}{\text{hipotenüs}} = \frac{a}{c}}$

$\boxed{\text{Tan}\,\theta = \frac{\text{karşı dik kenar}}{\text{komşu dik kenar}} = \frac{b}{a}}$

$\boxed{\text{Cot}\,\theta = \frac{\text{komşu dik kenar}}{\text{karşı dik kenar}} = \frac{a}{b}}$

Bu bağıntılardan faydalanılarak aşağıda verilen trigonometrik fonksiyonlar yazılabilir.

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{\text{Tan}\,\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} \Rightarrow \boxed{\text{Cot}\,\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$

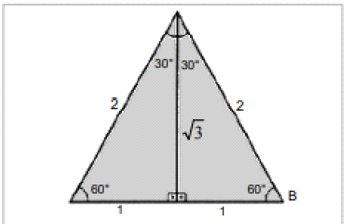
Ölçüleri toplamı 90° olan (tümler) iki açıdan birinin sinüsü, diğerinin kosinüsüne, birinin tanjantı, diğerinin kotanjantına eşittir.

7. 30° ve 60° açıların trigonometrik oranları

Şekil 12'de verilen ABC eşkenar üçgeninden,

Sin 30° = $\frac{1}{2}$ Cos 60° = $\frac{1}{2}$

Cos 30° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Sin 60° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$



Şekil 12

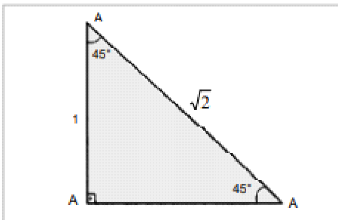
$\text{Tan } 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\qquad$ $\text{Tan } 60° = \sqrt{3}$

$\text{Cot } 30° = \sqrt{3}$ $\qquad$ $\text{Cot } 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

8. 45°'lik açıların trigonometrik oranları

Şekil 13'te verilen ABC ikizkenar dik üçgeninde,

$\text{Sin } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\text{Tan } 45° = 1$



Şekil 13

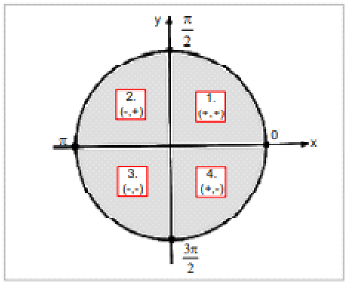
$\text{Cos } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ Cot 45° = 1'dir.

9. Birim çemberin bölgelerindeki trigonometrik fonksiyonların işaretleri

Şekil 14'te verilen daireye göre,

1. bölgede $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ise trigonometrik fonksiyonların hepsi pozitif işaretlidir.

2. bölgede $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ise sinüs pozitif, kosinüs negatif, tanjant negatif, kotanjant negatif işaretlidir.



Şekil 14

$\text{Tan} = \frac{\sin}{\cos} = \frac{+}{-} = -,$ $\qquad$ $\cot = \ = \frac{-}{+} = -$

3. bölgede $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ise sinüs ve kosinüs negatif, tanjant ve kotanjant pozitif işaretlidir.

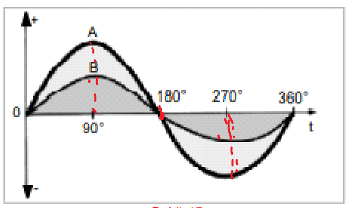
4. bölgede $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ ise kosinüs pozitif, sinüs, tanjant ve kotanjant negatif işaretlidir.

10. Faz farkı

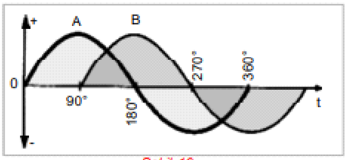
Eğrilerin aralarında bulunan açı ya da zaman farkına **faz farkı** denir.

A ve B sinüsoidal eğrileri aynı anda sıfırdan başladığı, aynı anda 90°'ye ulaştığı ve 180°'lik anda da her ikisi de sıfıra ulaştığı için aralarındaki faz farkı sıfırdır. Yani iki eğri aynı fazlıdır.

Şekil 16'daki A ve B sinüsoidal eğrileri arasındaki faz farkı 90°'dir. Çünkü A eğrisi 0°'den B eğrisi ise 90°'den başlamıştır. A eğrisi 90°'de pozitif maksimum değerine ulaşırken, B eğrisi henüz sıfır (0) değerindedir.



Şekil 15



Şekil 16

11. Temel vektör işlemleri

a. Vektör tanımlamaları

Bir tek sayı ve birimle ifade edilen değerlere **skaler büyüklük** adı verilir. Sıcaklık, zaman, kütle, hacim, enerji vb. gibi nicelikler skaler büyüklüktür.

Skaler büyüklüklerle ilgili işlemlerde cebirsel (aritmetik) işlemler yapılarak sonuçlara ulaşılır. Örneğin 2 kg şekere 8 kg daha eklersek toplam 10 kg şeker olur. Burada başka bir özelliğin bilinmesine gerek yoktur.

Diğer büyüklükler ise bir sayı ve birimle doğru olarak ifade edilemez. Bu tür niceliklerinin yanında büyüklüğünün ve yönünün de bildirilmesi gerekir. Bu tür büyüklükler vektörel nicelik olarak tanımlanır. Kuvvet, ağırlık hız, ivme, moment, yer değiştirme, elektrik alanı vb. gibi büyüklükler vektörel özelliktedir.

Rüzgârın 20 metre/saniye (m/s) hızla estiğini söylemek yeterli olmaz. Hangi yönde estiğini de belirtmek gerekir. Rüzgârın hızı doğu yönünde 20 m/s'dir denilirse hızın vektörü de ifade edilmiş olur.

Yönlendirilmiş doğru parçalarına **vektör** denir. Bir vektörün tam olarak tanımlanabilmesi için,

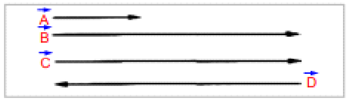
- ► Başlangıç noktası,
- ► Doğrultusu,
- ► Yönü,
- ► Büyüklüğü bilinmelidir.

Vektörel büyüklüklerin toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri cebirsel işlemlerden farklı yöntemlerle yapılmaktadır.

Vektörel işlemler ifade edilirken büyüklüklerin üzerine ok ($\vec{A}$) işareti konulur.

Vektörün özellikleri şunlardır:

► Bir vektörün doğrultusu boyunca kaydırılması vektörü değiştirmez.



Şekil 17: Vektör örnekleri

► Bir vektörün bir sayıyla çarpılması, aynı yön ve doğrultuda yeni bir vektör oluşturur.

► Bir vektörün bir sayıya bölünmesi, aynı yön ve doğrultuda yeni bir vektördür.

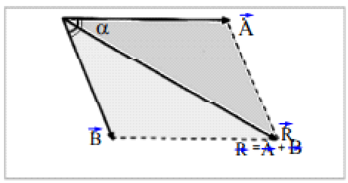
► Bir vektörün tersi, doğrultusu ve büyüklüğü aynı, kendisine zıt yönde olan vektördür. Vektörlerde eksi (-) işareti ters yönü, skaler büyüklüklerde ise çıkarmayı ifade eder.

b. Vektörlerin toplanması

İki ya da daha çok vektörün yaptığı etkiyi tek başına yapabilen vektörlere bileşke ya da toplam vektör denir. Vektörlerin toplanmasında çıkan sonuç, yönü, doğrultusu ve büyüklüğü belli olan yeni bir vektördür.

I. Paralel kenar yöntemi

Şekil 18'de verilen, aralarında belli bir açı bulunan iki vektörü toplamak için paralel kenar yöntemi kullanılır.



Şekil 18

Aralarında belli bir açı bulunan A ve B vektörlerinin bileşke değeri,

$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$

şeklinde ifade edilir.

$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$

$(\vec{R})^2 = (\vec{F})^2 + (\vec{F}_2)^2$

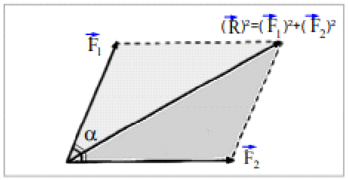
$$\boxed{R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2.F_1.F_2.\cos\alpha}}$$

Bu eşitliğe **kosinüs teoremi** denir.

$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$

$\vec{A}$

$\vec{B}$



Şekil 19

Kosinüs teoremine göre herhangi iki vektör için uygulanırken vektörler arasındaki açı,

► $\alpha < 90°$ ise $\cos \alpha = +$ işaretli olarak yazılır.
► $\alpha > 90°$ ise $\cos \alpha = -$ işaretli olarak yazılır.
► $\alpha = 90°$ ise $\cos 90 = 0$'dır.

Vektörler birbirine dik (90°) ise bileşkeleri,

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2.F_1.F_2.\cos\alpha}$$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2.F_1.F_2.\cos 90°}$$

Cos 90° = 0 olduğundan,

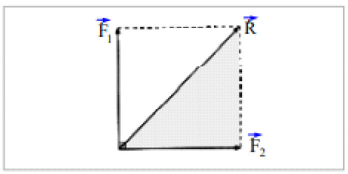
$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2.F_1.F_2.0}$$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 0}$$

$$\boxed{R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}}$$

şeklinde ifade edilen Pisagor teoremiyle hesaplanır.

Şekil 20'de 90°'lik vektörlerin bileşkesi görülmektedir.

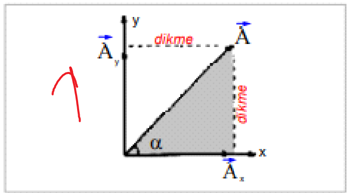


Şekil 20

II. Analitik yöntem

Vektörün dik koordinatlar sisteminde **x** ve **y** bileşenlerine ayrılarak bileşkesinin bulunmasına **analitik yöntem** denir.

$\vec{A}$'nın ucundan x ve y eksenlerine dikme çizilirse $\vec{A}$'nın yatay ($\vec{A}_x$) ve düşey ($\vec{A}_y$) bileşenleri



Şekil 21

bulunur. Bileşenlerin büyüklükleri,

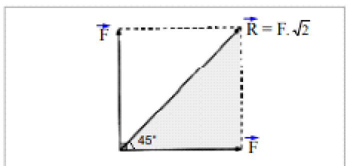
$\boxed{\vec{A}_x = A.\cos\alpha}$
$\boxed{\vec{A}_y = A.\sin\alpha}$

şeklinde yazılabilir.

► Aynı yönde, aralarındaki açı 0° olan iki vektörün toplamı,
$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ ile hesaplanır.
Örneğin, $\vec{A}$ = 5 birim, $\vec{B}$ = 2 birim ise toplam,
$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ = 5 + 2 = 7 birim olur.

► Zıt yönlü iki vektörün bileşkesi bulunurken büyük vektörden küçük vektör çıkarılır. Bileşke vektörün yönü, büyük olan vektörün yönündedir.
$\vec{R} = \vec{A} - \vec{B}$

► $\alpha = 90°$ ise $\cos 90° = 0$ olduğundan,
$R^2 = F^2 + F^2 = 2F^2$
$\boxed{R = F.\sqrt{2}}$
olur.



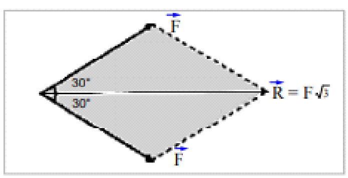
Şekil 22

► $\alpha = 60°$ ise
$R^2 = F^2 + F^2 + 2.F.F.\cos 60°$
$R^2 = F^2 + F^2 + 2.F^2.\frac{1}{2}$

$R^2 = 3F^2$

$R^2 = 3F^2$

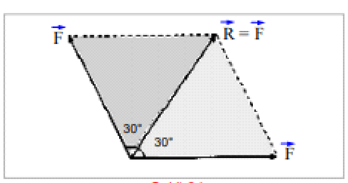
$R = F\sqrt{3}$



Şekil 23

$R^2 = 3.F^2$

$\boxed{R = F\sqrt{3}}$'tür.



Şekil 24

► $\alpha = 120°$ ise

$\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$'dir.

$R^2 = F^2 + F^2 + 2.F.F.\cos 120°$

Bir vektörden başka bir vektör çıkarılırken vektörlerin başlangıçları çakıştırılır. Çıkarılacak vektörün yönü değiştirilip bileşke bulunur.

Sorular

1. Vektör nedir? Açıklayınız.

2. Derece, grad ve radyan kavramlarını açıklayınız.

3. 75°'yi grad ve radyan'a çeviriniz.

4. Faz farkı nedir? Açıklayınız.

5. Aralarında 90° faz farkı bulunan iki vektörün bileşkesi nasıl hesaplanır? Açıklayınız.

6. Aralarında 90°'lik açı bulunan A ve B vektörlerinin toplamı (bileşkesi) nasıl hesaplanır? Açıklayınız.

► $\alpha = 120°$ ise

$\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$'dir.

$R^2 = F^2 + F^2 + 2.F.F.\cos 120°$

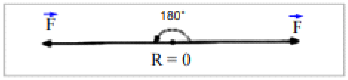
$R^2 = F^2 + F^2 - \cancel{2}.F^2.\frac{1}{\cancel{2}}$

$R^2 = F^2 + \cancel{F^2} - \cancel{F^2}$

$R^2 = F^2$

$\boxed{R = F}$

olur.



Şekil 25

► $\alpha = 180°$ ise $\cos 180° = -\cos 0° = -1$

$R^2 = F^2 + F^2 + 2.F.F.(-1)$

$R^2 = F^2 + F^2 - 2.F^2$

$R^2 = 2.F^2 - 2.F^2$

$\boxed{R = 0 \text{ olur.}}$

III. Vektörlerin çıkarılması

Bir vektörden başka bir vektör çıkarılırsa sonuç, yönü, büyüklüğü ve doğrultusu belli olan yeni bir vektördür. Buna **fark vektörü** denir.

6. Aralarında 90°'lik açı bulunan A ve B vektörlerinin toplamı (bileşkesi) nasıl hesaplanır? Açıklayınız.